I) Endomorphismes orthogonaux et produits scalaires

Exercice 1: ⋆ *b.14.1*

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \langle u_j \mid x\rangle^2$. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E.

Exercice 2: ⋆ *b.14.6*

1. Soit E un espace euclidien de dimension n et v un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i) \mid e_i\rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ choisie.
   (b) Montrer que $\sum_{(i,j)\in[\![1\,,n]\!]^2} \langle v(e_i) \mid f_j\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ de E choisies.
   (c) Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{ij})_{1lei,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\sigma(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2$.
   (a) Que vaut $\sigma(A)$ si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$? Et si A est la matrice dans la base canonique d'un projecteur orthogonal ?
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sigma(\Omega^\top A\Omega) = \sigma(A)$.

Exercice 3: ⋆ *b.14.8*

Soit $(E, \langle . \mid .\rangle)$ un espace euclidien ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 4: ⋆ *d.75.14*

Démontrer que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe c'est-à-dire que pour tous $x, y \in B$ différents et tout $t \in \,]0\,,1[$, $\|(1-t)x + ty\| < 1$.

Exercice 5: ★ *d.75.21*

On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0\,,1]\,,\mathbb{R})$ du produit scalaire donné par

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $f \in E$, on considère $T\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}[0\,,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$.

1. Montrer que T définit un endomorphisme de E.
2. Justifier l'existence d'un endomorphisme T^* de E vérifiant

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle T(f) \mid g\rangle = \langle f \mid T^*(g)\rangle$$

Exercice 6: ★ *d.75.27*

Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non-nul, $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la réflexion d'hyperplan $u^\perp$. Décrire la transformation $g \circ \sigma \circ g^{-1}$.

Exercice 7: ★★ *d.76.9*

Soit $V \in \mathbb{R}^n \backslash 0$. On considère $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$Q = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} V V^\top \text{ avec } \|V\|^2 = V^\top V$$

1. Montrer que la matrice Q est symétrique et orthogonale.
2. A quelle transformation géométrique correspond la matrice Q ?

Exercice 8: ★★ *d.76.50*

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables *si et seulement si* $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 9: ★★ *b.14.34*

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
Montrer que u est une homothétie *si et seulement si* u commute avec toute isométrie de E.

Exercice 10: ★★ *b.14.21*

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

- $\lhd$ f préserve l'orthogonalité : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) \mid f(y) \rangle = 0$.
- $\lhd$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
- $\lhd$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{O}(E), f = \alpha g$.

Exercice 11: ★★ *b.14.30*

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien. Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on pose $I(f) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$ et $K(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note s_x la réflexion par rapport à $x^\perp$.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que E est somme directe orthogonale de $I(f)$ et $K(f)$.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que $I(s_{x_1} \circ \cdots \circ s_{x_p}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 12: ★★★ *b.14.10*

Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une famille obtusangle d'un espace euclidien $(E, \langle . \mid . \rangle)$: pour tout $(i, j) \in [\![0\,, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i \mid x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.
2. Montrer l'existence dans tout espace euclidien de dimension n, d'un $(n+1)$-uplet vérifiant les hypothèses de la question précédente.
3. On suppose dans cette question que $\dim E = n+1$ et que la famille est libre. On considère $(e_1, \ldots, e_n)$ la base orthonormée obtenue par Gram-Schmidt. Montrer que la matrice de passage des (x_j) aux (e_j) est à coefficients positifs.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(x_0, \ldots, x_n) = n$. Démontrer que toute famille $(x_j)_{j \in [\![0\,,n]\!] \setminus \{k\}}$ de cardinal n est libre est que l'expression de x_k dans cette famille a des composantes strictement négatives.
5. On suppose E de dimension n, les x_i de norme 1 et les produits scalaires deux-à-deux constants. Montrer que cette constante est égale à $\dfrac{-1}{n}$ et que la somme des x_i est nulle.

Exercice 13: ★★★ *b.14.11*

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs tels que $\|e_k - f_k\|_2 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$

est une base. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose l'inégalité large ?

Exercice 14: ★★★ *b.14.12*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}$$

Exercice 15: ★★★ *b.14.13 / b.8.5*

Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que N provient d'un produit scalaire.

II) Endomorphismes symétriques

Exercice 16: ★ *d.76.157*

Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_k = \left(\mathrm{Tr}(S^k)\right)^{\frac{1}{k}}$$

Etudier la limite de $(u_k)_{k \geqslant 1}$.

Exercice 17: ★ *d.14.39*

Soit a un vecteur d'un espace euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha(x) : x \mapsto x + \alpha \langle a \mid x \rangle a$$

1. Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les endomorphismes f_α bijectifs ?
2. Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 18: ★★ *b.14.16*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \langle A \mid B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B) \end{array} \right.$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

2. Montrer que pour tout $A = (a_{ij}) \in E$, $|\mathrm{Tr}\, A| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{(i,j)} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. A quelle condition a-t-on égalité ?
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Soit $A = (a_{ij}) \in E$. Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{(i,j)} (a_{ij} - m_{ij})^2$.
5. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.
7. Calculer la distance de la mattrice d'Attila (ne comportant que des (h)uns) à ce sous-espace vectoriel.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des matrices scalaires. Trouver $G^\perp$ et calculer $d(M, G)$.

Exercice 19: ★★ *b.14.40*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^2) \geqslant n$ et qu'il y a égalité *si et seulement si* A est une symétrie orthogonale.

Exercice 20: ★★ *d.76.138*

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace euclidien E. On suppose que u et u^* commutent. Montrer que l'endomorphisme u est autoadjoint.

Exercice 21: ★★ *b.14.42*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $A = ST$ avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.
2. Montrer que A est diagonalisable *si et seulement si* il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = SAS^{-1}$.

Exercice 22: ★★ *b.14.44*

Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère p et q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.

2. Montrer $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ et que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 23: ★★ *b.14.45*

1. Soient $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien, p et q des projecteurs orthogonaux, $x \in E$ tel que $p(x) = -q(x)$. Montrer que $p(x) = q(x) = 0$.
2. Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E tels que $\det(f+g) = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq \{0\}$.

Exercice 24: ★★ *b.14.49*

Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $B \leqslant A$ *si et seulement si* $A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A \leqslant B$ *si et seulement si* $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top A X \leqslant X^\top B X$, et que $\leqslant$, définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée *si et seulement si* elle est majorée et minorée au sens de $\leqslant$.
3. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que $X(A) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \leqslant S\}$ et $Y(A) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), S \leqslant A\}$ sont convexes et fermées.
4. Que dire de $Z(A, B) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \leqslant S \leqslant B\}$?
5. Montrer qu'une suite croissante et majorée au sens de $\leqslant$, converge.
6. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$ tel que $A \leqslant N$. Montrer que $\det A \leqslant \det B$.

Exercice 25: ★★ *b.14.50*

Soit $a > 0$, E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer $\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (f^2 + a(f')^2); f \in E, f(0) = v \right\}$.
4. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose : $A \leqslant B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. On note d'autre part $\sqrt{A}$ l'unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $A \leqslant B$. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}$.

Exercice 26: ★★ *b.14.53*

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de M (avec multiplicités) et $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_n$ celles de M', la matrice obtenue à partir de M en enlevant la première ligne et la première colonne. Montrer que

$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

Exercice 27: ★★ *b.14.55*

1. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans R_+^*.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) \subseteq [a_1 b_1\,, a_n b_n]$, où $a_1 = \min \mathrm{Sp}(A)$ et $a_n = \max \mathrm{Sp}(A)$ (et de même pour B).
3. Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28: ★★ *b.14.76*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
2. On définit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$. On considère $f : A \in E \mapsto (A + I_n)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $S \in \mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $f(f(A)) = A$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $M_x = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $f(M_{\tan(\frac{\theta}{2})})$ pour $\theta \in]-\pi\,, \pi[$.
6. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$, il $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ et $x_1, \ldots, x_n$ tels que pour $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale par blocs constituées des blocs $M_{x_1}, \ldots, M_{x_n}$.

Exercice 29: ★★★ *d.76.182*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Posons pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x \mid y \rangle_A = \langle A^{-1}x \mid y \rangle$$

1. Montrer que $\langle . \mid . \rangle_A$ est un produit scalaire.

2. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable.
3. Montrer que l'image de $E\setminus\{0\}$ par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx \mid x\rangle}{\langle A^{-1}x \mid x\rangle}$$

n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$.

4. Montrer que

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_{\min}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$$

Exercice 30: ★★★ *b.14.43*

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots b_n$. Montrer que

$$\operatorname{Tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Exercice 31: ★★★ *b.14.48*

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la sous-matrice $A_k = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ est définie positive et que son déterminant D_k est strictement positif.
2. On suppose que $D_k > 0$ pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$. Montrer que A est définie positive.
3. Soit $t \in\,]0\,,1[$. Montrer que $A(t) = (t^{|i-j|})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.
4. Montrer que $B = \left(\dfrac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive.

Exercice 32: ★★★ *b.14.52*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(M) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(M)$ la suite ordonnée des valeurs propres de M. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\lambda_1(A+B) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.
2. Montrer que pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^{k} = \max\left\{\sum_{i=1}^{k}\langle Az_i \mid z_i\rangle, (z_1,\dots,z_k) \text{ famille orthonormée de } E\right\}$$

3. Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B)$$

Exercice 33: ★★★ *b.14.59*

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, α et β dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

1. Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^{\alpha}(\det B)^{\beta}$.
2. Montrer que $(\det(I_n + A)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + (\det A)^{\frac{1}{n}}$.
3. Montrer que $(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.